

5

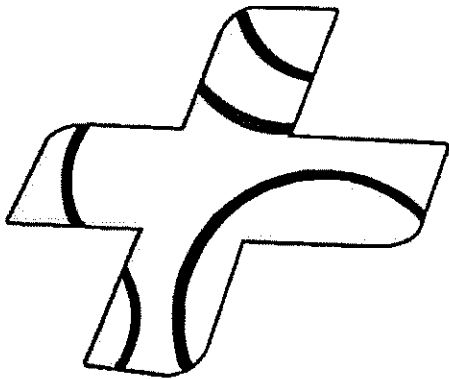
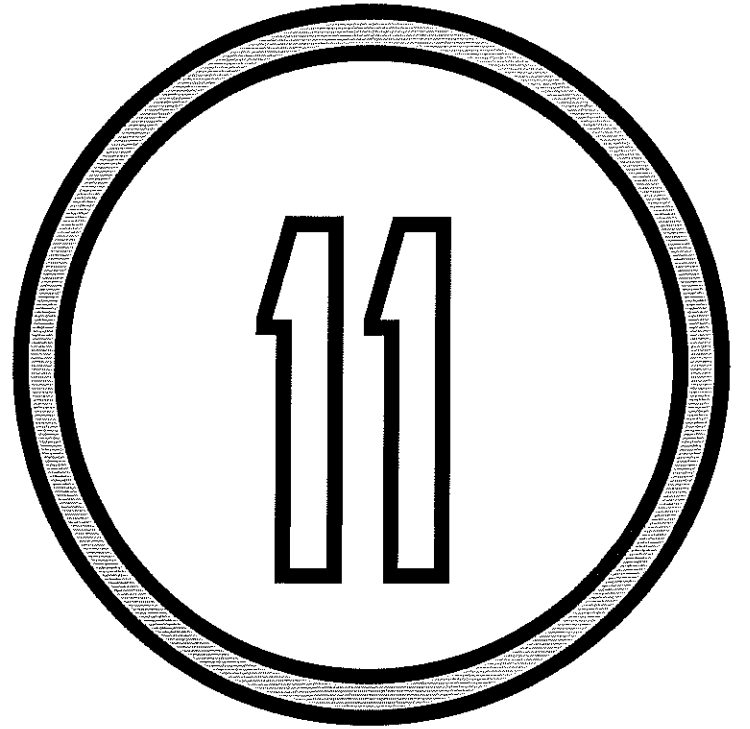
الرياضيات

التحليل (5)

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي



PLUS

LIBRARY



0944879460



011-2151436



البرامكة - حرم كلية العلوم



Plus Library

P L U S	المحاضرة : 11	السنة: الثالثة	القسم: رياضيات	P L U S
	التاريخ: 2019/ 4 /4	المكتور: نايف طلي	المادة: تحليل 5	

سنبدأ بمحاضرة اليوم بحث جديد من مقرنا وهو تكامل استيلجس

مجموع استيلجس:

إذا كانت الدالتين f, g دالتين حقيقتين معرفتين ومحدودتين على $[a, b]$ ، وكانت p تجزئة للمجال $[a, b]$ بالشكل:

$$p = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

نعرف مجموع استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g :

$$S(p, f, g) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \Delta g_k$$

حيث $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ و $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$ ومنه:

$$S(p, f, g) = \sum_{k=1}^n f(t_k) (g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

ندعو $S(p, f, g)$ مجموع استيلجس للدالة f على g (للدالة f وفق g أو للدالة f بالنسبة لـ g)

تعريف تكامل استيلجس:

نقول عن f إنه قابل للمكاملة بالنسبة لـ g (وفق $g \in \mathbb{R}(g)$ على $[a, b]$ وفق استيلجس إذا وجدت $A \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) (g(x_k) - g(x_{k-1})) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S(f, g, p) = A$$

$$\text{نظيم التجزئة} = \Delta x = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k - x_{k-1}\}$$

هذا التكامل يسمى تكامل استيلجس للدالة f على g للدالة ونرمز له بالشكل:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(t_k) \cdot \Delta g_k) = (S) \int_a^b f \cdot dg = A$$

التعريف السابق من وجه نظر استيلجس وهو تعميم لريمان والسبب في ذلك نأخذ الملاحظات التالية:

ملاحظات:

$$g(x) = x \quad (1)$$

عندئذٍ يصبح تكامل استيلجس هو تكامل ريمان:

$$\begin{aligned} \int_a^b f \cdot dg &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S(f, x, P) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x_k} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S(f, x, P) = \int_a^b f \cdot dx$$

ملاحظة: (نظيم التجزئة) $\Delta x = \Delta P = \|P\|$

$$f(x) = 1 \quad (2)$$

فإن الدالة تكون ثابتة أي $f(t_k) = 1$

$$S(f, g, P) = \sum_{k=1}^n (1) \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

$$= g(x_1) - g(x_0) + g(x_2) - g(x_1) + \dots + g(x_n) - g(x_{n-1})$$

$$\Rightarrow S(1, g, P) = g(x_n) - g(x_0) = g(b) - g(a)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (1 \cdot \Delta g_k) = \int_a^b f \cdot dg = \int_a^b dg = g(b) - g(a)$$

تعريف ثاني تكامل استيلجس:

إذا كانت f, g دالتين حقيقتين ومحدودتين على $[a, b]$ نقول عن f إنه قابل للمكاملة بالنسبة لـ g)

وفق $g \in \mathbb{R}(g)$ $f \in \mathbb{R}(g)$ على $[a, b]$ وفق استيلجس إذا وجدت $A \in \mathbb{R}$ بحيث تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon; P \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(P, f, g) - A| < \varepsilon$$

ونرمز لـ A بـ $(S) \int_a^b f \cdot dg$

شروط وجود تكامل استيلجس:

(1) إذا كان $g(x)$ تابعاً متزايداً على $[a, b]$ فإن الشرط اللازم والكافي ليكون تكامل استيلجس موجوداً هو أن تتحقق العلاقة:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [U(p, f, g) - L(p, f, g)] = 0$$

حيث p تجزئة لـ $[a, b]$ وحيث: $\Delta x = \max_{1 \leq k \leq n} [\Delta x_k]$

$$U(f, g, P) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \cdot \Delta g_k ; M_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} [f(x)]$$

$$L(f, g, P) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \cdot \Delta g_k ; m_k(f) = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} [f(x)]$$

إن \sup, \inf موجودين لأن الدالتين محدودتين على المجال.

(2) إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على $[a, b]$ و $f(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$ فإن تكامل استيلجس يكون موجوداً. أي:

$$\exists A \in \mathbb{R}; \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S(f, g, P) = A = (S) \int_a^b f \cdot dg$$

(3) إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$ و كانت $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$ فإن تكامل استيلجس يكون موجوداً. أي:

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ م.ت.د. على } [a, b] \\ f \text{ مستمرة على } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}; \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S(f, g, P) = A = (S) \int_a^b f \cdot dg$$

(4) إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على $[a, b]$ وكانت $g(x)$ تحقق شرط ليبشتر (من الدرجة 1) إن تكامل استيلجس يكون موجوداً.

(5) إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$ وكانت $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ومحدودة وكمولة على $[a, b]$ بمفهوم ريمان عندئذ: تكامل استيلجس يكون موجوداً.

$$\underbrace{(S) \int_a^b f \cdot dg}_{\text{استيلجس}} = \underbrace{(R) \int_a^b f \cdot g' dx}_{\text{ريمان}} \quad \text{ويعطى بالعلاقة:}$$

خواص تكامل استيلجس:

$$1] \int_a^b d(g(x)) = g(b) - g(a)$$

$$2] \int_a^b (f_1(x) \mp f_2(x)) \cdot dg(x) = \int_a^b f_1(x) \cdot dg(x) \mp \int_a^b f_2(x) \cdot dg(x)$$

$$3] \int_a^b f(x) \cdot d(g_1(x) \mp g_2(x)) = \int_a^b f(x) \cdot dg_1(x) \mp \int_a^b f(x) \cdot dg_2(x)$$

$$4] \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int_a^b \alpha f(x) \cdot d(\beta g(x)) = \alpha \cdot \beta \int_a^b f(x) d(g(x))$$

مكتبة PLUS

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.



Math Mad Team