الرياضيات

5

التحليل (5)

11

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

PLUS LIBRARY

سنبدأ بمحاضرة اليوم بحث جديد من مقررنا وهو تكامل استيلجس

مجموع استيلجس:

إذا كانت الدالتين f , g دالتين حقيقيتين معرفتين ومحدودتين على $[a,b]$،

وكانت p تجزئة للمجال $[a,b]$ بالشكل:

$$p = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

نعرف مجموع استيلجس للدالة f بالنسبة لـِ g:

$$S(p,f,g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta g_k$$

حيث $t_k \in [x_{k-1}\,, x_k]$

وَ $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$

ومنه:

$$S(p,f,g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big)$$

ندعو $S(p,f,g)$ مجموع استيلجس للدالة f على g(للدالة f وفق g أو للدالة f بالنسبة g)

تعريف تكامل استيلجس:

نقول عن f إنه قابل للمكاملة بالنسبة لـِ g (وفق g $(f \in \mathbb{R}(g))$ على $[a\,,b]$ وفق استيلجس إذا وجدت $A \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} S(f,g,p) = A$$

نظيم التجزئة $= \Delta x = \max_{1 \le k \le n} \{x_k - x_{k-1}\}$

هذا التكامل يسمى تكامل استيلجس للدالة f على g للدالة ونرمز له بالشكل:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) \cdot \Delta g_k) = (S) \int_a^b f \cdot dg = A$$

التعريف السابق من وجه نظر استيلجس وهو تعميم لريمان والسبب في ذلك نأخذ الملاحظات التالية:

ملاحظات:

1) $g(x) = x$

عندئذٍ يصبح تكامل استيلجس هو تكامل ريمان:

$$\int_a^b f \cdot dg = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} S(f, x, P)$$

$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x_k}$$

$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} S(f, x, P) = \int_a^b f \cdot dx$$

ملاحظة: (نظيم التجزئة) $\Delta x = \Delta P = \|P\|$

2) $f(x) = 1$

فإن الدالة تكون ثابتة أي $f(t_k) = 1$

$$S(f, g, P) = \sum_{k=1}^{n} (1) \cdot \big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big)$$

$$= g(x_1) - g(x_0) + g(x_2) - g(x_1) + \cdots + g(x_n) - g(x_{n-1})$$

$$\Longrightarrow S(1, g, P) = g(x_n) - g(x_0) = g(b) - g(a)$$

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} (1 \cdot \Delta g_k) = \int_a^b f \cdot dg = \int_a^b dg = g(b) - g(a)$$

تعريف ثاني تكامل استيلجس:

إذا كانت f, g دالتين حقيقتين ومحدودتين على $[a, b]$ نقول عن f إنه قابل للمكاملة بالنسبة لـِ g (وفق g $(f \in \mathbb{R}(g)$ على $[a , b]$ وفق استيلجس إذا وجدت $A \in \mathbb{R}$ بحيث تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists P_\varepsilon; \;\;\; P \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(P, f, g) - A| < \varepsilon$$

ونرمز لـ A بـ $(S)\int_a^b f \cdot dg$

شروط وجود تكامل استيلجس:

1) إذا كان $g(x)$ تابعاً متزايداً على $[a,b]$ فإن الشرط اللازم والكافي ليكون تكامل استيلجس موجوداً هو أن تتحقق العلاقة:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0}[U(p,f,g) - L(p,f,g)] = 0$$

حيث p تجزئة لِ $[a,b]$ وحيث: $\Delta x = \max_{1 \le k \le n} [\Delta x_k]$

$$U(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \cdot \Delta g_k \quad ; M_k(f) = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} [f(x)]$$

$$L(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \cdot \Delta g_k \quad ; m_k(f) = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} [f(x)]$$

إن sup, inf موجودين لأن الدالتين محدودتين على المجال.

---

2) إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ و $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ فإن تكامل استيلجس يكون موجوداً. أي:

$$\exists A \in \mathbb{R} ; \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} S(f,g,P) = A = (S)\int_a^b f \cdot dg$$

---

3) إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ و كانت $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن تكامل استيلجس يكون موجوداً. أي:

$$\left.\begin{matrix} g \text{ م.ت.د على} [a,b] \\ f \text{ مستمرة على} [a,b] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R} ; \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} S(f,g,P) = A = (S)\int_a^b f \cdot dg$$

---

4) إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ تحقق شرط ليبشتز (من الدرجة 1) إن تكامل استيلجس يكون موجوداً.

---

5) إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ومحدودة وكمولة على $[a,b]$ بمفهوم ريمان عندئذ: تكامل استيلجس يكون موجوداً.

ويعطى بالعلاقة: $\underbrace{(S)\int_a^b f \cdot dg}_{\text{استيجلس}} = \underbrace{(R)\int_a^b f \cdot g' dx}_{\text{ريمان}}$

خواص تكامل استيلجس:

$$\mathbf{1]}\quad \int_a^b d(g(x)) = g(b) - g(a)$$

$$\mathbf{2]}\quad \int_a^b \big(f_1(x) \mp f_2(x)\big)\cdot dg(x) = \int_a^b f_1(x)\cdot dg(x) \mp \int_a^b f_2(x)\cdot dg(x)$$

$$\mathbf{3]}\quad \int_a^b f(x)\cdot d\big(g_1(x) \mp g_2(x)\big) = \int_a^b f(x)\cdot dg_1(x) \mp \int_a^b f(x)\cdot dg_2(x)$$

$$\mathbf{4]}\ \forall\ \alpha,\beta\ \in \mathbb{R}:\int_a^b \alpha f(x)\cdot d\big(\beta g(x)\big) = \alpha\cdot\beta\int_a^b f(x)\, d\big(g(x)\big)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.

Math Mad Team